

TEMA NR. 7

pagina 1

FORME BILINIARE, FORME LINIARE ȘI FORME PĂTRATICE

Probleme rezolvate

① Fie $A: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2,$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2)$ și $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Să se arate că A este formă biliniară simetrică.

b) Să se găsească matricea B a formei biliniare A în baza $B' = \{\vec{e}'_1 = (1, 1), \vec{e}'_2 = (-1, 1)\}$.

Rezolvare a) A este formă biliniară simetrică dacă și numai dacă într-o bază B din \mathbb{R}^2 există o matrice simetrică $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ astfel încât să avem

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = X^T A Y,$$

unde X este coloana coordonatelor vectorului \vec{x} în baza B și Y aceeași pentru vectorul \vec{y} (dar în locul lui \vec{x} se pune \vec{y}).

Se observă că în baza canonică $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ în care este definită aplicația A putem scrie

$$\begin{aligned} A(\vec{x}, \vec{y}) &= x_1(y_1 - y_2) + x_2(-y_1 + 2y_2) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = X^T A Y, \text{ deci } A \text{ este} \end{aligned}$$

formă biliniară. Este și simetrică matricea A , deci A este formă biliniară simetrică.

b) Se știe că $B = C^T A C$ unde C este matricea de trecere de la baza B la baza B' . Se vede că

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. În baza B' forma biliniară A are expresia $B(\vec{x}', \vec{y}') = x'_1 y'_1 + x'_1 y'_2 + x'_2 y'_1 + 5x'_2 y'_2$ unde $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)_{B'}$ și $\vec{y}' = (y'_1, y'_2)_{B'}$. VERIFICATI REZULTATUL PE ALTE CALE!

TEMA NR. 7

pagina 2

② Se consideră funcția (aplicația) reală de două variabile vectoriale $A: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_2 + 2x_1 y_3 - x_3 y_1 + 3x_3 y_3,$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se arate că A este formă biliniară care nu este simetrică.

b) Să se determine matricea B a formei bilinare A în baza

$$W = \{\vec{w}_1 = (1, 2, -1), \vec{w}_2 = (-1, 1, 0), \vec{w}_3 = (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Rezolvare a) Se procedează ca la exercitiul precedent și deducem că $A(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y}$, unde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Avem că A este matricea lui A în baza canonică $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ din \mathbb{R}^3 . Vectorii \vec{x} și \vec{y} se exprimă prin

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \vec{e} X, \text{ unde } \vec{e} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 = \vec{e} Y, \text{ unde } \vec{e} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$$

b) Matricea de trecere C de la baza B la baza W este $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Se știe că } B = C^T A C.$$

Efectuând produsele de matrice (TEMA!), găsim

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, A se exprimă în baza W astfel:

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = 4x'_1 y'_1 + x'_1 y'_3 - x'_2 y'_2 - 3x'_2 y'_3 + 4x'_3 y'_1 + 2x'_3 y'_2 + 5x'_3 y'_3.$$

VERIFICATI! ultimul rezultat înlocuind în expresia lui A în baza canonică pe $\vec{x} = C \vec{x}'$ și $\vec{y} = C \vec{y}'$, iar aceste egalități în fi sunt pe elemente: $x_1 = x'_1 - x'_2 + x'_3$, $x_2 = 2x'_1 + x'_2 + x'_3$, ...

③ Fie forma pătratică $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin
 $P(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3$, $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se afle forma biliniară simetrică din care provine P .

b) Să se aducă P la expresia canonică prin metoda lui Gauss determinându-se și baza conjugată.

Rezolvare. Se observă că $P(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ unde
 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Forma biliniară simetrică

de unde provine P este atunci $B(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y} =$
 $= x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_1 y_3 + 3x_3 y_1$.

Se observă că B se obține prin procedeele de dedublare aplicat lui P .

b) Efectuăm pătrat cu termenii ce conțin x_3 , pentru că pare mai simplu. În cele două cazuri, găsim
 $A(\vec{x}, \vec{y}) = (3x_1 + x_3)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right)^2 - \frac{17}{2}x_1^2$.

Notăm
$$(*) \begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_3 \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

Atunci:

$$P(\vec{x}) = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{17}{2}y_3^2$$

unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele lui \vec{x} într-o bază B' care putem să o determinăm căci știm inversa matricei C de trecere de la baza 'canonică' $B \subset \mathbb{R}^3$ la baza B' . Din (*) se vede că

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ca să găsim } C \text{ reparam } (*) \text{ în notările } x_1, x_2, x_3. \text{ Avem}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_3 \\ x_2 = -y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_1 - 3y_3 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ deci } B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} \text{ și}$$

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_3, \vec{f}_2 = -\vec{e}_2, \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

TEMA NR. 7

pagina 4

- ④ Să se determine o formă linară în \mathbb{R}^3 , neidentică nulă, așa fel încât $f(\vec{u}_1) = 0$, $f(\vec{u}_2) = 3$ și $f(\vec{u}_3) = -2$, unde $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$, și $\vec{u}_3 = (-1, 0, 2)$.

Reprezare O formă linară este un operator linar în care $m=1$, iar $V=K$. Aadar aplicația $f: U \rightarrow K$, unde U este spațiu linar peste câmpul K , este formă linară în (pe) \mathbb{R}^3 dacă f este aditivă și omogenă, mai general, $f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in U$.

Folosind rezultatul stabilit pentru operatori linari (vezi TEMA NR. 5, problema ①) deducem că f este formă linară dacă

$$f(\vec{x}) = A\vec{X}, \text{ unde } A \in M_{1 \times n}(K)$$

iar \vec{X} este matricea coloană a coordonatelor vectorului \vec{u} într-o bază B . Avem că

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

Evident $a_1 = f(\vec{e}_1)$, $a_2 = f(\vec{e}_2)$, ..., $a_n = f(\vec{e}_n)$, unde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} = B$.

Din datele problemei rezultă

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = 0 \\ f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) = 3 \\ -f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{e}_1) = a_1 = \frac{2}{3} \\ f(\vec{e}_2) = a_2 = -\frac{7}{3} \\ f(\vec{e}_3) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Prin urmare, $f(\vec{x}) = \frac{2}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3$.

Preafare. Numerele a_1, a_2, a_3 se numesc coeficienți forme f în bază B .

- ⑤ Ce coeficienți are forma pătratică de la punctul precedent în baza B' știind că matricea C de trecere de la baza canonică B la baza B' este $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Rezolvare Particularizăm formula $B = L^{-1}AM$ unde, în cazul nostru $L = 1$, deci $L^{-1} = 1$, iar $M = C$.

Notând $B = (b_1 \ b_2 \ b_3) \Rightarrow B = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 $= \left(\frac{2}{3} \ -\frac{7}{3} \ -\frac{2}{3} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left(0 \ \frac{7}{3} \ -\frac{2}{3} \right)$. Adădar,

$P(\vec{x}) = \frac{7}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2$, unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele lui \vec{x} în baza nouă.

- ⑥ Fie $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice din $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Să se găsească forma linară $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(X_1) = -3, \quad f(X_2) = 0, \quad f(X_3) = -5, \quad f(X_4) = 2.$$

Să se determine apoi dimensiunea și o bază a subspațiului $\{X \mid f(X) = 0\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R}^3)$.

Rezolvare O bază B (care ar putea fi numită canonică) în $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ este formată din matricele

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci: $X_1 = E_{12} + E_{21} + E_{22} = (0, 1, 1, 1)_B$

$$X_2 = E_{11} + E_{21} + E_{22} = (1, 0, 1, 1)_B$$

$$X_3 = E_{11} + E_{12} + E_{22} = (1, 1, 0, 1)_B$$

$$X_4 = E_{11} + E_{12} + E_{21} = (1, 1, 1, 0)_B$$

TEMA NR. 7

pagina 6

Forma linară $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ are, în baza β , expresia

$$f(\bar{X}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4, \text{ unde:}$$

$$a_1 = f(E_{11}), a_2 = f(E_{12}), a_3 = f(E_{21}), a_4 = f(E_{22});$$

$$\bar{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)_{\beta} = x_1 E_{11} + x_2 E_{12} + x_3 E_{21} + x_4 E_{22}$$

Impunând condițiile din enunț, obținem sistemul

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = -3 \\ a_1 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 = -5 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 2 \end{cases}$$

Adunând ecuațiile, găsim $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -2$.
Folosind acest rezultat în fiecare dintre
ecuațiile sistemului, găsim $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 3,$
 $a_4 = -4$. Prin urmare: $f(\bar{X}) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$.

Subspațiul din enunț este $\text{Ker } f$, adică
nucleul forme linare f . Din $f(\bar{X}) = 0 \Rightarrow$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

O soluție oarecare \bar{X} din $\text{Ker } f$ are forma

$$\bar{X} = (2x_2 - 3x_3 + 4x_4, x_2, x_3, x_4)$$

$$\text{Se vede că } \bar{X} = x_2(2, 1, 0, 0) + x_3(-3, 0, 1, 0) + x_4(4, 0, 0, 1) = x_2 \bar{V}_1 + x_3 \bar{V}_2 + x_4 \bar{V}_3$$

Vectorii $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ sunt linear independenți (demonstrat!)

Deci $\dim \text{Ker } f = 3$, iar o bază în $\text{Ker } f$
este $\mathcal{B} = \{ \bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3 \}$. Evident că pt $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$
putem scrie $\bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{V}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{V}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

TEMA NR. 7

pagina 7

(7) Se dă forma bilineară $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, a cărei matrice în baza canonică $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ este

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Să se scrie expresia analitică a formei g în baza B .

2) Să se arate că g este simetrică.

3) Să se găsească matricea G' a formei g în baza $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, unde

$$\vec{f}_1 = (1, 1, 1), \vec{f}_2 = (1, 2, 1), \vec{f}_3 = (0, 0, 1).$$

Rezolvare. 1) Evident: $g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_2 + 2x_2 y_3 - x_3 y_1 + 2x_3 y_2$.

2) g este simetrică pt că $G = G^T$.

3) $B = C^T G C$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8) Să se scrie formele pătratice asociate formelor bilinare simetrice:

$$1) A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1$$

$$2) A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$$

Rezolvare. Forma pătratică P asociată lui A este dată de $P(\vec{x}) = A(\vec{x}, \vec{x}) \Rightarrow$

$$1) P(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

$$2) P(\vec{x}) = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3.$$

9) Utilizând metoda lui Jacobi să se determine expresia canonică și baza corespunzătoare a formei pătratice

$$P(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Matricea A a lui P în baza canonică $B \subset \mathbb{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Determinanții lui Sylvester sunt $\Delta_1 = 1$,
 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\Delta_3 = \det A = -7$.

Conform metodei lui Jacobi, există o bază $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ în care P are expresia canonică

$$P(\vec{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2,$$

unde Δ_0 este prin definiție 1 iar $\vec{x} = x_1' \vec{e}'_1 + x_2' \vec{e}'_2 + x_3' \vec{e}'_3$.

Fie C matricea de trecere de la B la B' .
 Se știe că C este triunghiulară superioară

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}. \text{ Deci}$$

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = c_{11} \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 = c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = c_{13} \vec{e}_1 + c_{23} \vec{e}_2 + c_{33} \vec{e}_3. \end{cases}$$

Elementele lui C se determină din condițiile: $A(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) = 1$; $\begin{cases} A(\vec{e}_1, \vec{e}'_2) = 0 \\ A(\vec{e}_2, \vec{e}'_2) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} A(\vec{e}_1, \vec{e}'_3) = 0 \\ A(\vec{e}_2, \vec{e}'_3) = 0 \\ A(\vec{e}_3, \vec{e}'_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow$

TEMA NR. 7

pagina 9

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 3/7 \\ 0 & -1/3 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = \frac{3}{7}\vec{e}_1 - \frac{1}{7}\vec{e}_2 - \frac{1}{7}\vec{e}_3 \end{cases}$$

- 10) Să se determine rangul r , indicii de inerție
 μ (numărul pătratelor pozitive dintr-o expresie canonică)
 q (——— " ——— negative ——— " ———)
 și să se precifice natura formelor pătratice

$$1) P(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$2) P(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$$

$$3) P(\vec{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$4) P(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Rezolvare Pentru a răspunde cerințelor problemei trebuie să aducem fiecare formă pătratică la o expresie canonică printr-o metodă cunoscută (metoda lui Gauss, metoda valorilor și vectorilor proprii, metoda lui Jacobi). Avem:

$$1) P(\vec{x}) \stackrel{\text{Gauss}}{=} x_1^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 \Rightarrow r=3, \mu=3, q=0 \text{ și forma pătratică este } \underline{\text{nedegenerată}} \text{ și pozitiv definită.}$$

$$2) P(\vec{x}) \stackrel{\text{Gauss}}{=} (x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2 \Rightarrow r=2, \mu=2, q=0 \text{ și forma pătratică se numește } \underline{\text{pozitiv semidefinită}}. \text{ Este } \underline{\text{degenerată}} \text{ deoarece } r < 3 \text{ (dimensiunea } \mathbb{R}^3 \text{).}$$

$$3) \text{Aplicăm Jacobi: } \Delta_1 = 7 > 0, \Delta_2 = 48 > 0, \Delta_3 = 432 > 0 \Rightarrow r=3, \mu=3, q=0 \text{ - forma patr. pozitiv definită.}$$

$$4) \text{Jacobi } \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -3, \Delta_3 = -27 \Rightarrow r=3, \mu=2, q=1 \text{ și forma } P(\vec{x}) \text{ este nedefinită și, deigur, nedegenerată pentru că } r=3.$$

TEMA NR. 7

pagina 10



Probleme propuse

①. Se dă forma biliniară $A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_3 y_3$, unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) să se scrie matricea A a lui A în baza canonică $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ din \mathbb{R}^3 .

b) să se determine matricea B a lui A în baza $\tilde{F} = \{\tilde{F}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \tilde{F}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \tilde{F}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$.
și expresia lui A în această bază.

Răspuns. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = C^T A C$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = 5x'_1 y'_1 + x'_1 y'_2 + 5x'_1 y'_3 + 5x'_2 y'_1 + x'_2 y'_2 + 4x'_2 y'_3 + 5x'_3 y'_1 + 4x'_3 y'_3.$$

②. Se dă forma pătratică $P(\vec{x}) = 2x_1 x_2 - 6x_1 x_3 - 6x_2 x_3$ unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se determine: matricea A în baza uzuală B ; expresia canonică prin metoda lui Gauss; baza canonică și corespunzătoare; matricea A' în baza canonică; rangul și natura lui P .

Răspuns După ce se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \text{forma } P \text{ devine } P(\vec{x}) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 18y_1 y_3 = 2(y_1^2 - 6y_1 y_3) - 2y_2^2 = 2(y_1 - 3y_3)^2 - 18y_3^2 - 2y_2^2$$

TEMA NR. 7

pagina 11

- ③. Să se găsească formele liniare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care
 $f(0, 1, -1) = 0$, $f(-2, 1, 1) = 0$.

Răspuns. $f(\vec{x}) = \alpha(x_1 + x_2 + x_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ④. Se dă forma biliniară $A: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $A(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_3 + x_2y_4 + 2x_3y_1 + x_3y_3 - 2x_4y_1 + x_4y_2$
 Să se arate că mulțimea de vectori din \mathbb{R}^4
 $S = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^4 \mid A(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \}$
 este subspațiu vectorial al lui \mathbb{R}^4 numit subspațiu
nul al lui A relativ la al doilea argument.

Să se determine o bază și dimensiunea acestui subspațiu.

Indicație. $A(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4$ implică $\begin{cases} 4y_1 - 2y_2 = 0 \\ y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_3 = 0 \\ -2y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

Răspuns. S este subspațiul generat de vectorul $\vec{v} = (1, 2, -2, 2)$, deci $\{ \vec{v} \}$ bază în S și deci $\dim S = 1$.

- ⑤. Utilizând metoda lui Jacobi să se determine expresia canonică și baza conjugată pentru forma pătratică $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(\vec{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2.$$

Răspuns. $P(\vec{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2$, unde:

$\Delta_0 = 1$; $\Delta_1 = 5$; $\Delta_2 = 26$; $\Delta_3 = 80$. Baza are matricea

$$\text{de trecere } C = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/13 & 3/20 \\ 0 & 5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{pmatrix}.$$

Vezi problema repetată de mai multe ori din această temă!